# المحاضرة ① المحددات »المعينات« DETERMINANTS

## أولاً : المحددات من المرتبة الثانية و المرتبة الثالثة :

- نسمي الكائن الرياضي : $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ محدداً من المرتبة الثانية ، حيث $a,b,c,d$ مقادير عددية و نسمي المقدار $\Delta= ad-bc$ قيمة أو مفكوك أو منشور المحدد $\Delta$.
- نسمي الكائن الرياضي : $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ محدداً من المرتبة الثالثة ، و هو مؤلف من ثلاثة أعمدة و ثلاثة أسطر ، ندعو العناصر $a_1,b_2,c_3$ عناصر القطر الرئيسي ، بينما ندعو العناصر $c_1,b_2,a_3$ عناصر القطر الثانوي .

يمكن نشر هذا المحدد بعدة طرق نذكر منها :

### ❶ طريقة ساروس ( *Sarrus* ) :

| |
|---|
| **هذه الطريقة لا تطبّق إلا لمحددات المرتبة الثالثة** |

**خطوات تطبيق طريقة ساروس :**

- نكرّر عناصر العمودين الأول و الثاني على يمين المحدد المراد نشره.
- نأخذ المجموع الجبري لجداءات عناصر القطر الرئيسي و القطرين الموازيين له مطروحاً منه المجموع الجبري لجداءات عناصر القطر الثانوي و القطرين الموازيين له.

**تطبيق عددي: احسب قيمة المحدد التالي :** $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

الحل : نكرّر عناصر العمودين الأول و الثاني على يمين المحدد $\Delta$.

$$\Delta=\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

نأخذ المجموع الجبري لجداءات عناصر القطر الرئيسي و القطرين الموازيين له مطروحاً منه المجموع الجبري لجداءات عناصر القطر الثانوي و القطرين الموازيين له

$$\Delta= [(1\times1\times2)+(2\times2\times1)+(0\times2\times1)]-[(0\times1\times1)+(1\times2\times1)+(2\times2\times2)]$$

$$\Delta= [(2)+(4)+(0)]-[(0)+(2)+(8)]=-4$$

تمرين : احسب قيمة الوسيط $\beta$ التي تعدم المحدد التالي : $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & \beta\end{vmatrix}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & \beta\end{vmatrix}\begin{matrix}2 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{matrix}$$

$$\Delta=[(2\times1\times\beta)+(-1\times1\times2)+(1\times0\times3)]-[(1\times1\times2)+(2\times1\times3)+(-1\times0\times\beta)]$$

$$\Delta=[(2\beta)+(-2)+(0)]-[(2)+(6)+(0)]=2\beta-10=0$$

$$\Delta=2\beta-10=0\ \rightarrow\ \boxed{\beta=5}$$

❷ طريقة بيزو ( *Bezout* ) :

و هي الطريقة العامة في نشر المحدد وفق أحد أسطره أو أحد أعمدته

و لكن قبل البدء بشرح هذه الطريقة لابد من ذكر بعض التعاريف المهمة :

❷ ⬅ ❶ : **صغير العنصر *Minor*** : إن صغير العنصر $a_{ij}$ في المحدد $\Delta$ هو المحدد الناتج من حذف سطر و عمود العنصر $a_{ij}$ و نرمز له بالرمز $M(a_{ij})$.

**تطبيق (★): في المحدد** $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ **أوجد صغير العنصر** $a_{11}$ **و** $a_{32}$

$$M(a_{11})=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\ ،\ M(a_{32})=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}$$

❷ ⬅ ❷ : **المتمم الجبري *Cofactor*** : إن المتمم الجبري للعنصر $a_{ij}$ هو صغير العنصر $a_{ij}$ مضروباً بالإشارة $(-1)^{i+j}$ و نرمز له بالرمز $A_{ij}=(-1)^{i+j}M(a_{ij})$ .

**تطبيق : في المحدد $\Delta$ في التطبيق (★) أوجد المتمم الجبري للعنصر $a_{11}$ و $a_{32}$**

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M(a_{11})=+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M(a_{32})=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}$$

❷ ⬅ ❸ : **منقول محدد *Transpose of determinant***: هو المحدد $\Delta^T$ الناتج من جعل أسطر المحدد $\Delta$ أعمدة و أعمدته أسطراً مع المحافظة على الترتيب ، إن قيمة المحدد تساوي قيمة منقوله أي $\Delta^T=\Delta$

**مبرهنة بيزو** : إن مفكوك محدد يساوي مجموع جداء عناصر أحد أسطره ( أعمدته ) في متمماتها الجبرية.

**تطبيق : يُنشر المحدد $\Delta$ في التطبيق (★) وفق السطر الأول بالعلاقة :**

$$\Delta=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}$$

**ملاحظة مهمة جداً :**

**عند نشر محدد بطريقة يزو ينصح دوماً بالنشر وفق السطر (العمود) الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار.**

**تمرين: احسب قيمة المحدد التالي :** $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

الحالة الأولى : ننشر وفق السطر الأول :

$$\Delta = (-1)^{1+1}(1)\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(0)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(2)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{+2}$$

الحالة الثانية : ننشر وفق العمود الثاني ( يحوي أكبر عدداً من الأصفار):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \times (1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(4-6) = \boxed{+2}$$

** لاحظ مقدار الاختصار في الحل بين الحالة الأولى و الحالة الثانية .

**ثانياً : خواص المحددات :**

① تنعدم قيمة المحدد إذا حوى سطراً ( عموداً ) جميع عناصره أصفار . $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$

② تنعدم قيمة المحدد إذا تطابق فيه سطران ( عمودان ) . $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$

③ تنعدم قيمة المحدد إذا تناسب فيه سطران ( عمودان ) . $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$

④ إن تبديل موقعي سطرين ( عمودين ) في محدد يغير فقط من إشارته.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \boxed{+2} \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \boxed{-2}$$

⑤ لضرب محدد بعد ثابت غير معدوم نضرب جميع عناصر أحد الأسطر أو أحد الأعمدة بهذا العدد ، و بالعكس عند إخراج عامل مشترك فإننا نخرجه من جميع عناصر أحد الأسطر أو أحد الأعمدة .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (2)\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 8 & 3 \\ \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ 9 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (2)(3)\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 8 & 3 \\ \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{vmatrix}$$

⑥ يمكن تجزئة جميع عناصر سطر ما أو عمود ما إلى مجموع عنصرين ثم نقوم بتجزئة المحدد المعطى إلى مجموع محددين يماثلان المحدد الأصلي و يختلفان معه فقط بالسطر أو العمود المجزء ، حيث يتم توزيع عناصر السطر المجزء على المحددين المذكورين.

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&4&2&1\\1&7&8&3\\11&15&12&5\\8&11&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&4&2&1\\1&7&8&3\\1+10&7+8&8+4&3+2\\8&11&2&0\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\underbrace{\begin{vmatrix}5&4&2&1\\1&7&8&3\\1&7&8&3\\8&11&2&0\end{vmatrix}}_{R2,R3\ \text{تطابق}}+\underbrace{\begin{vmatrix}5&4&2&1\\1&7&8&3\\10&8&4&2\\8&11&2&0\end{vmatrix}}_{R1,R3\ \text{تناسب}}=0+0=0$$

⑦ لا تتغير قيمة المحدد إذا جمعنا إلى عناصر أحد أسطره ( أعمدته ) العناصر المقابلة لها في سطر ( عمود ) آخر مضروبة بعدد ما غير معدوم.

$$\Delta=\underbrace{\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix}}_{\substack{R2\to R2-R1\\R3\to R3-R1}}=\underbrace{\begin{vmatrix}1&2&3&4\\4&4&4&4\\8&8&8&8\\13&14&15&16\end{vmatrix}}_{R2,R3\ \text{تناسب}}=0$$

## ☙☙☙ تمارين داعمة على خواص المحددات ❧❧❧

**التمرين الأول :** احسب قيمة المحدد $\Delta$ التالي : $\Delta=\begin{vmatrix}1+2a&1&3a&7x\\1+2b&2&3b&7x\\1+2c&3&3c&7x\\1+2d&4&3d&7x\end{vmatrix}$

الحل : بالاعتماد على خاصية تجزئة المحدد إلى محددين نجد :

$$\Delta=\underbrace{\begin{vmatrix}1&1&3a&7x\\1&2&3b&7x\\1&3&3c&7x\\1&4&3d&7x\end{vmatrix}}_{C1,C4\ \text{تناسب}}+\underbrace{\begin{vmatrix}2a&1&3a&7x\\2b&2&3b&7x\\2c&3&3c&7x\\2d&4&3d&7x\end{vmatrix}}_{C1,C3\ \text{تناسب}}=0+0=0$$

**التمرين الثاني : علل انعدام قيمة المحدد** $\Delta=\begin{vmatrix}sin^2\alpha&cos2\alpha&cos^2\alpha\\sin^2\beta&cos2\beta&cos^2\beta\\sin^2\gamma&cos2\gamma&cos^2\gamma\end{vmatrix}$

الحل : نجري التحويل: $C_3\to C_3-C_1$ :

$$\Delta=\begin{vmatrix}sin^2\alpha&cos2\alpha&cos^2\alpha\\sin^2\beta&cos2\beta&cos^2\beta\\sin^2\gamma&cos2\gamma&cos^2\gamma\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}sin^2\alpha&cos2\alpha&cos^2\alpha-sin^2\alpha\\sin^2\beta&cos2\beta&cos^2\beta-sin^2\beta\\sin^2\gamma&cos2\gamma&cos^2\gamma-sin^2\gamma\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}sin^2\alpha&cos2\alpha&cos^2\alpha\\sin^2\beta&cos2\beta&cos^2\beta\\sin^2\gamma&cos2\gamma&cos^2\gamma\end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix}sin^2\alpha&cos2\alpha&cos2\alpha\\sin^2\beta&cos2\beta&cos2\beta\\sin^2\gamma&cos2\gamma&cos2\gamma\end{vmatrix}}_{C2,C3\ \text{تطابق}}=0$$